线性代数期中试题解答

一、单项选择题（每小题 5 分，共 20 分）。

1．已知四阶行列式 D_4 第 1 行的元素依次为 $1,2,-1,-1$，它们的余子式依次为 $2,-2,1,0$，则 D_4 值为(A)。

（A）5； （B）3；（C）-5；（D）-3。

2．已知 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，则 $|A|$ 的所有元素的代数余子式和（B）

（A）0； （B）1； （C）-1； （D）2。

3. 设 n 阶方阵 A,B,C 满足关系 $ABC=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，则必有（D ）

（A） $ACB=E$； （B） $CBA=E$；（C） $BAC=E$；（D） $BCA=E$。

4. 设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$ 则 A 和 B 的秩（ B ）。

（A）必有一个等于零； （B）都小于 n；

（C）一个小于 n，一个等于 n； （D）都等于 n。

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）。

1.设 A 是 n 阶矩阵， A^* 是 A 的伴随矩阵，若 $|A|=a$，$|B|=b$，则行列式 $\begin{vmatrix} A^* & O \\ B & 2A \end{vmatrix} = \underline{2^n a^n}$。

2. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=2$，四阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=4$，则四阶行列式 $|2\alpha_3+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2| = \underline{\quad 4 \quad}$。

3. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+3A=O$，则 $(A+2E)^{-1} = \underline{\frac{1}{2}(A+E)}$。

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵，矩阵满足 $BA=B+2E$，则 $|B|= \underline{\quad 2 \quad}$。

三、解答下列各题（每小题 8 分，共 40 分）。

1. 求行列式$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$的值

解：原式 $=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2. 设$A^3=\begin{pmatrix} 10 & -18 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ，求A

解　　由$|A^3|=-8$得$|A|=-2$，

有$AA^*=|A|E$可得　$A=-2\left(A^*\right)^{-1}$

$$\left(A^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故　$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$ 的秩

解 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\0&1&a-2&2\\0&2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\0&0&a-1&2-a\\0&0&0&4-2a\end{pmatrix}$

即 $|A|=(a-1)(4-2a)$，故当 $a\neq1$ 且 $a\neq2$ 时 $r(A)=4$。

当 $a=1$ 或 $a=2$ 时 $r(A)=3$

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $X=AX+B$，求 X

解 由题意得 $(E-A)X=B$，从而 $X=(E-A)^{-1}B$

$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&-1&2&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&2&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&1&-1\\0&1&0&3&0\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&4&-1\\0&1&0&3&0\\0&0&1&2&-1\end{pmatrix}$

故 $X=\begin{pmatrix}4&-1\\3&0\\2&-1\end{pmatrix}$

5 已知 $AP=PB$, 其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A^{20}，

解 注意到 $|P|=-1$，可知 P 可逆。由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$

故 $A^{20}=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^{20}P^{-1}$

注意到 $B^2=E$，可得 $A^{20}=E$

四、证明（每小题 5 分，共 10 分）。

1 设 A 不可逆，证明 A^* 也不可逆。

证明：由 A 不可逆，可得 $A^*A=|A|E=O$

若 A^* 可逆，则有 $\left(A^*\right)^{-1}A^*A=\left(A^*\right)^{-1}O$，即 $A=O$，则必有 $A^*=O$

则与 A^* 可逆矛盾，故 A^* 也不可逆。'

2 设 A 是 5 阶矩阵，证明 $A-A^T$ 不可逆。

证明 $\left|A-A^T\right|=\left|\left(A-A^T\right)^T\right|=\left|A^T-\left(A^T\right)^T\right|=\left|A^T-A\right|=\left|-\left(A-A^T\right)\right|$

$\left(-1\right)^5\left|A-A^T\right|=-\left|A-A^T\right|$，则 $\left|A-A^T\right|=0$，故 $A-A^T$ 不可逆。